Un primo approccio alla probabilità: percentuali e trappole

M. Nichelatti, M. Nordio, U. Maggiore, M. Postorino, A. Limido

a nome del Comitato Scientifico SIN-RIDT

Premessa

Se un evento ha una probabilità di realizzarsi pari al 2.7%, esprimiamo la probabilità utilizzando un formalismo molto frequente, tanto da essere entrato a far parte del lessico comune. Tuttavia, pur nella sua grande praticità, è molto scomodo per effettuare dei calcoli, e quindi, è preferibile sostituirlo con una notazione alternativa: la migliore sarebbe "la probabilità dell'evento è pari a 0.027" (che altro non è che il risultato della divisione 2.7/100), ma è altrettanto valida quella di trasformare la probabilità relativizzandola all'evento: dato che 100 diviso per 2.7 è uguale a circa 37, potremo scrivere che la probabilità di realizzarsi dell'evento è pari a 1 su 37, ovvero a 1/37 (che, appunto, è uguale a circa 2.7/100). In generale, per motivi che saranno più chiari andando avanti, è sempre preferibile evitare il simbolo "%" (anche se noi qui lo useremo), ed esprimere la probabilità come frazione, sapendo che quando si parla di una probabilità del 50% (ad esempio, citando l'ottenimento dell'evento "testa" dopo il lancio di una moneta), le notazioni 0.50, 5/10, e 1/2, sono tra loro equivalenti.

Operazioni con le percentuali

Più o meno, siamo tutti abituati ad avere a che fare con percentuali e ad interpretarle. L'inflazione, lo spread, l'affluenza alle urne, l'assegnazione dei seggi in parlamento, il tasso di disoccupazione, ed altro ancora, sono tutte grandezze espresse come percentuale, e che rendono questa informazione familiare e d'uso comune.

- *La ZZZ S.r.l. a inizio anno aveva un capitale sociale di 87 mila; al termine dell'anno finanziario il capitale è aumentato del 43%: a quanto ammonta ora?*

- *Il signor Pasquale investe 1000 € in borsa, acquistando 500 € in azioni della società X ed altrettanti in azioni della società Y. Il primo giorno le azioni X salgono del 10%, mentre le azioni Y scendono del 10%; il secondo giorno, le azioni X scendono del 10%, mentre le azioni Y salgono del 10%. "Meno male – pensa Pasquale – chiudo in pareggio". Ha ragione, no?*

Le percentuali sono uno strumento utilizzato ampiamente per descrivere in modo sintetico i risultati di una sperimentazione clinica (il farmaco Z ha determinato il 75% di guarigioni), oppure per descrivere la prevalenza o l'incidenza di una determinata malattia (l'influenza ha messo a letto l'8% degli italiani), e per questo motivo, dato che viene trattata con eccessiva confidenza, spesso la usiamo o la interpretiamo a sproposito: certo, l'uso della percentuale è intuitivo e immediato, ma questo non deve ridurre l'attenzione nel leggere i risultati.

- *In un ospedale ci sono due reparti di medicina, che chiameremo Medicina 1 e Medicina 2: si vuole sperimentare l'efficacia di due farmaci antidolorifici chiamati A e B, utilizzandoli, una settimana ciascuno, in 200 pazienti ricoverati in entrambi i reparti e confrontando i risultati. L'efficacia del farmaco è valutata come la capacità di ridurre in modo sensibile, o di far scomparire del tutto la sintomatologia dolorosa, e quindi è valutata come una risposta "binaria", di tipo sì/no. La prima settimana si utilizza solo il farmaco A in 100 pazienti, mentre la seconda settimana si usa solo il farmaco B, sempre in 100 pazienti; al termine delle due settimane di sperimentazione i due Direttori dei reparti si incontrano e confrontano i risultati, che sono quelli forniti nelle due Tabelle di seguito. "Non c'è paragone – concordano i due – dato che nella Me-*

dicina 1 il farmaco A è stato efficace nell'80% dei casi, mentre il farmaco B lo è stato solo nel 70% e nella Medicina 2 il farmaco A è stato efficace nel 50% dei casi, mentre il farmaco B lo è stato solo nel 40%, sembra evidente che A sia più efficace di B". Siete d'accordo con i due Direttori?

[redacted]

[redacted]	8	2	80%
[redacted]	45	45	50%

[redacted]

La percentuale ha il dono della semplicità, ma ha anche dei difetti che ne limitano l'uso nelle analisi statistiche: infatti, è difficile (per non dire impossibile) parlare, ad esempio, di una riduzione del 125% dell'incidenza di una malattia, oppure esprimere il concetto di "incidenza percentuale raddoppiata" se quella basale era del 56%.
Per questo motivo, andando avanti, abbandoneremo (poco alla volta) il concetto di percentuale e useremo prima quello di probabilità e poi quello di odds.

Una prima introduzione alla probabilità

In prima approssimazione, e solamente per nostra comodità di ragionamento, possiamo dire che esistono due tipi di probabilità: la prima potremmo chiamarla "probabilità intuitiva", mentre l'altra potremmo chiamarla "probabilità quantitativa". Ripetiamo che si tratta di definizioni di comodo, quasi eretiche, e che farebbero drizzare i capelli in testa a qualsiasi cultore della matematica e della statistica, ma queste definizioni che abbiamo utilizzato ci serviranno per capire due tra i principali punti di vista dai quali si sviluppa la teoria della probabilità che interessa noi per i nostri scopi.
L'aspetto *intuitivo* della probabilità appare abbastanza evidente quando abbiamo a che fare con fenomeni o eventi per i quali la struttura dell'esperimento è tale da farci intuire quali potrebbero essere i risultati dell'esperimento stesso. Un esempio potrebbe essere il lancio di una moneta: se la moneta non è truccata, la probabilità di ottenere testa e la probabilità di ottenere croce sono identiche e sono uguali al 50%, perché la moneta ha due facce. Un ulteriore esempio potrebbe essere il lancio di un dado: se il dato non è truccato, e dato che il dado ha sei facce, la probabilità di ottenere qualsiasi punteggio che va da 1 a 6 è pari a $1/6 = 1.\overline{6}$, dato che l'uscita di un risultato o di un altro hanno esattamente la stessa probabilità.
L'aspetto quantitativo della probabilità è invece quello più frequente nei ragionamenti di tipo clinico e nelle indagini epidemiologiche: se sappiamo che in un campione di 1000 pazienti ospedalizzati la prevalenza di un'infezione nosocomiale è del 6%, possiamo trasformare questa frequenza di malattia in una probabilità, e potremmo dire che la probabilità che un paziente ospedalizzato acquisisca un'infezione nosocomiale è del 6%. In altre parole, la frequenza con cui sappiamo che si verifica un evento (perché abbiamo svolto, ad esempio, un'indagine preliminare) diventa la probabilità che l'evento si verifichi.
Quindi esistono situazioni in cui possiamo immaginare quale possa essere la probabilità teorica di realizzazione di un certo evento (lancio di un dado, lancio di una moneta, uscita di un certo risultato alla roulette ecc.), ed altre situazioni in cui il calcolo teorico della probabilità è molto più complicato, e ci può far comodo considerare la probabilità di un certo evento come la frequenza con la quale l'evento si è realizzato a partire da informazioni già precedentemente in nostro possesso.
Ripetiamo che queste due definizioni le useremo a solo scopo didattico, e che quindi ci servono solamente per preparare le basi intuitive sulle quali fonderemo le nostre successive discussioni relative alla probabilità.

Lancio di una moneta e intersezione di eventi

Sappiamo tutti, intuitivamente, che lanciando una moneta in aria e lasciandola cadere, la probabilità che la moneta cada mostrando la faccia "testa" (T) è pari al 50%, e la probabilità che mostri la faccia "croce" (C) è anch'essa pari al 50%. Il tutto – ovviamente – se la moneta non è truccata. Il fatto che con il primo lancio si sia ottenuta T, non influenza il risultato del secondo lancio, dove si può ottenere ancora T, oppure C (ciascuno sempre con il 50% di probabilità), e i risultati ottenuti con il primo e il secondo lancio, a loro volta, non influenzeranno il risultato dei lanci successivi. In altre parole, i risultati che si ottengono con i lanci di una moneta sono *eventi indipendenti*.
Quando abbiamo a che fare con eventi indipendenti, la probabilità del verificarsi di una determinata sequenza di eventi è uguale al prodotto delle probabilità dei singoli eventi. Quindi, la probabilità di ottenere la sequenza T,T,T dopo avere lanciato una moneta per tre volte con-

secutive è pari a $1/2 \times 1/2 \times 1/2 = 1/8$, ovvero al 12.5%, ma questa probabilità è identica per qualsiasi sequenza che si ottenga dopo tre lanci. Attribuiamo inconsciamente una particolare valenza statistica alla sequenza T,T,T (ed anche a C,C,C, ovviamente), ma la sua probabilità di realizzarsi è identica a quella di qualsiasi altra sequenza, come T,C,C, oppure C,T,T. Infatti, se vediamo la Figura 1 che rappresenta i risultati ottenibili con tre lanci consecutivi di una moneta, notiamo che le possibili terne di risultati sono otto, e che ciascuna di esse ha esattamente una probabilità di realizzarsi pari a 1/8, come abbiamo appena visto.
In pratica, il risultato che si ottiene lanciando una moneta non è in grado di influenzare il risultato che si otterrà nel lancio successivo, né viene influenzato dal risultato ottenuto nel lancio precedente. I risultati che si ottengono con i successivi lanci di una moneta sono quindi degli eventi indipendenti, e la probabilità di ottenere una certa sequenza di risultati è uguale al prodotto delle singole probabilità individuali, relative a ciascun lancio indipendente.
Questo è un risultato molto importante e generalizzabile: quando abbiamo a che fare con un evento "composto" dall'intersezione di due o più eventi "elementari", la probabilità che si realizzi è data dal prodotto delle probabilità degli eventi elementari che la compongono. Ad esempio, la probabilità che in una famiglia con due figli ambedue siano maschi, è pari al prodotto della probabilità che sia un maschio il primo figlio per il prodotto della probabilità che sia un maschio il secondo figlio, e quindi è pari a $1/2 \times 1/2 = 1/4$, ovvero al 25%.
Quando parliamo di intersezione di eventi tra loro indipendenti, intendiamo dire che per far verificare l'evento composto di nostro interesse, bisogna che si realizzino gli eventi elementari che lo determinano: in altre parole l'intersezione di due o più eventi A, B, C, eccetera, richiede che si verifichi l'evento A <u>e</u> l'evento B <u>e</u> l'evento C, eccetera.

- *Qual è la probabilità di fare "13" giocando una schedina del totocalcio?*
- *E qual è la probabilità di fare "0"?*

<u>Lancio di un dado e unione di eventi</u>

I risultati che si ottengono con i lanci successivi di un dado sono anch'essi eventi indipendenti, perché ogni risultato ottenuto non è influenzato dal risultato precedente e non influenza il risultato successivo. Tuttavia i risultati che si ottengono dopo il lancio di un dado ci consentono di ampliare la nostra visione del concetto di probabilità, perché ci permettono di ragionare sull'unione di eventi.

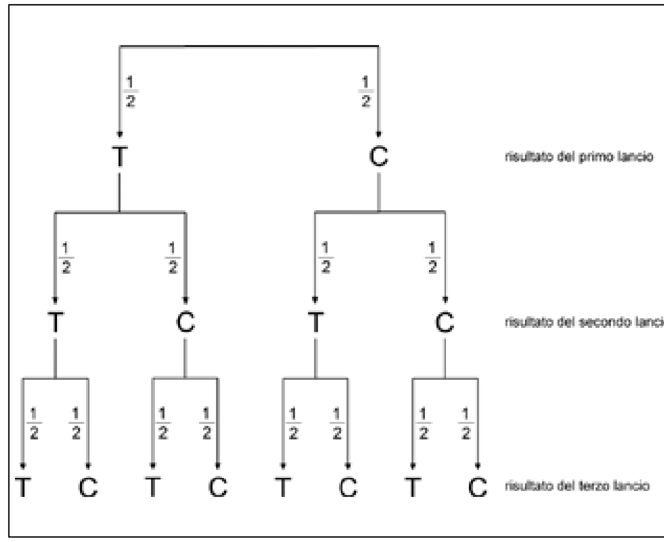

Fig. 1 - Sono visualizzati i possibili risultati di una sequenza di tre lanci di una moneta. I risultati possibili sono 8, nell'ordine: TTT, TTC, TCT, TCC, CTT, CTC, CCT e CCC, e ciascun risultato ha una probabilità di realizzarsi pari a 1/8 = 12.5%. Si noti come gli eventi a cui diamo particolare rilevanza (TTT, oppure CCC), abbiano la stessa probabilità di realizzarsi di tutti gli altri eventi quando consideriamo la sequenza con cui ogni evento è stato generato. Se invece ragioniamo in termini di semplice conteggio delle uscite, e non delle sequenze che realizzano il conteggio, abbiamo che in 1 caso su 8 (cioè nel 12.5% dei casi) la sequenza è composta da 3 teste (TTT) e che sempre in 1 caso su 8 (12.5% dei casi) è composta da 3 croci (CCC), mentre in 3 casi su 8 (cioè nel 37.5% dei casi) la sequenza è formata da 2 teste e 1 croce (TTC, TCT, CTT) e ancora in 3 casi su 8 (ancora il 37.5% dei casi) la sequenza è formata da 1 testa e 2 croci (TCC, CTC, CCT).

Sappiamo già "intuitivamente" che ogni risultato che si ottiene lanciando un dado ha una probabilità teorica pari a 1/6: ma se ci chiedessimo quale potrebbe essere la probabilità di ottenere come risultato un numero pari, come dovremmo ragionare? In questo caso avremo a che fare con un evento composto dall'unione di eventi elementari, infatti lanciando un dado possono uscire tre numeri pari (2, 4 e 6) e tre numeri dispari (1, 3, e 5), e quindi l'evento di nostro interesse non è più come nel caso dell'intersezione la realizzazione di un evento e di un altro evento, ma diventa la realizzazione di un evento o di un altro evento. In altre parole, l'uscita di un numero pari dopo il lancio di un dado è un evento composto formato dall'uscita del 2 o dall'uscita del 4 o dall'uscita del 6, e la probabilità dell'evento composto si calcola sommando le singole probabilità.
Nel caso di nostro interesse otteniamo facilmente che

la probabilità di uscita di un numero pari è data da $1/6 + 1/6 + 1/6 = 3/6 = 1/2$, dato che la probabilità di uscita delle possibili opzioni che realizzano l'evento è sempre 1/6.
Per fare un esempio un po' più complicato, possiamo calcolare la probabilità di ottenere un punteggio complessivo pari a 8 con il lancio simultaneo di due dadi. Lanciando un dado, i possibili risultati sono 6, ma lanciandone 2, le possibili coppie di risultati elementari sono 36 (1+1, 1+2, 1+3, …, 6+5, 6+6), e quindi dobbiamo selezionare le possibili coppie cha fanno ottenere 8 come somma. Assumendo che il primo numero sia il risultato ottenuto con il primo dado, e che il secondo numero sia quello ottenuto con il secondo, le coppie di nostro interesse sono (2+6), (3+5), (4+4), (5+3) e (6+2), cioè, gli esiti favorevoli all'evento di nostro interesse (ottenere 8) sono 5, mentre tutti gli esiti possibili (favorevoli e no) sono invece 36. Di conseguenza, la probabilità di ottenere 8 con il lancio di due dadi è $5/36 = 0.13\overline{8}$, quindi circa il 13.9%.

- *Qual è la probabilità di ottenere almeno 8 con il lancio di due dadi?*
- *Qual è la probabilità di ottenere un numero pari come risultato del lancio di due dadi?[Fate attenzione a non cadere nel trabocchetto contenuto in questa domanda…]*

Risposte alle domande del numero precedente

- Misurare l'altezza media di tutti gli italiani è impresa impossibile, non fosse altro che ogni giorno in Italia muoiono circa 1500 persone, e circa altrettante ne nascono, per cui l'altezza media degli italiani cambia ogni giorno, e l'altezza media, se si potesse ottenere, sarebbe quella "del giorno", e con molta probabilità il giorno dopo non sarebbe più la stessa.
- La formula della media aritmetica è la stessa che si usa per calcolare il baricentro di un corpo, o per calcolare la posizione del fulcro di una leva su cui fossero disposti dei pesi in posizione analoga alle misure ottenute (NB: questa domanda serviva solo per vedere se la formula vi richiamava alla mente qualcosa; nessun problema se non avete risposto).
- La media aritmetica e la media geometrica di una serie di misure sono identiche solamente se sono identiche le misure. In altre parole, se 4 persone sono alte 180 cm ciascuna, allora la media aritmetica e la media geometrica sono uguali tra loro (e incidentalmente, anch'esse saranno pari a 180 cm).
- Se due misure danno come risultati 5 e 7, la loro media aritmetica è 6, mentre la media geometrica è $\sqrt{35} \approx 5.92$; se i risultati delle misure fossero invece 4 e 8, la media aritmetica sarebbe ancora 6, mentre quella geometrica scenderebbe a $\sqrt{32} \approx 5.66$.
- Se le misure fossero invece 6 e 6, la media aritmetica resterebbe pari a 6, mentre la media geometrica risulterebbe $\sqrt{36} \approx 6$, cioè uguale alla media aritmetica (dato che le misure su cui si calcola la media sono identiche). La cosa dovrebbe ricordare quella legge della geometria piana secondo cui a parità di perimetro, il rettangolo che ha la superficie maggiore è quello con i lati uguali: la media geometrica ha il valore massimo quando le misure sono uguali e tende ad avere valori via via minori quanto più le misure sono tra loro diverse; per verificarlo, calcolate la media geometrica di due misure quando queste sono 6 e 6, 5 e 7, 4 e 8, 3 e 9, e vedrete una progressiva riduzione del valore, mentre la media aritmetica delle coppie di valori rimane pari a 6.
- La mediana di una serie di misure può benissimo essere maggiore della loro media: ad esempio, quando più del 50% delle misure fosse pari al valore massimo, la mediana sarebbe sempre maggiore della media. Per fare un esempio pratico, consideriamo di avere misurato il peso in kg di 7 persone, ottenendo 67, 70, 71, 80, 80, 80 e 80; 4 valori su 7 (più del 50% delle misure) sono pari al valore massimo, mentre le altre 3 misure sono inferiori, e quindi la mediana dei pesi è 80, mentre la media è sicuramente inferiore.
- Media, mediana e moda possono avere esattamente lo stesso valore indipendentemente dalla grandezza del campione.
- Elevando al quadrato gli scarti dalla media si evita che la somma degli scarti si azzeri.
- Se il peso medio dei cinque pazienti si misura in kg, la varianza del peso si misura in kg^2.
- Se avessimo usato la somma dei valori assoluti degli scarti dalla media anziché i quadrati degli scarti, avremmo ovviamente ottenuto un valore minore (per la precisione, avremmo ottenuto 10 anziché 26).

Le risposte alle domande presenti nell'articolo saranno pubblicate sul prossimo numero del *Giornale di Tecniche Nefrologiche & Dialitiche* Vol. 24, No. 4